**Problema 1**

Sean  números reales tales que  y . Hallar el valor del producto de estos tres números.

**Problema 2**

Simplificar la expresión:

**Problema 3**

En el triángulo  sean  sobre el lado  y  sobre el lado , tales que . Sean  y  los puntos medio de  y  respectivamente. Demostrar que la bisectriz de  es perpendicular a la recta .

**Problema 4**

Demostrar que:



Para todo .

**Problema 5**

Tres apostadores A, B y C pronostican el resultado de cinco partidos de fútbol. (L= Local, E=empate, V= visitante). Las tarjetas presentadas fueron:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | L | E | V |  |  | L | E | V |  |  | L | E | V |
| 1 | X |  |  |  | 1 |  |  | X |  | 1 | X |  |  |
| 2 | X |  |  |  | 2 |  | X |  |  | 2 | X |  |  |
| 3 |  | X |  |  | 3 | X |  |  |  | 3 |  |  | X |
| 4 |  | X |  |  | 4 |  | X |  |  | 4 | X |  |  |
| 5 |  |  | X |  | 5 | X |  |  |  | 5 |  | X |  |
| *Jugador A* | | | |  | *Jugador B* | | | |  | *Jugador C* | | | |

Finalizados los partidos se observó que los apostadores obtuvieron: A, tres aciertos; B, tres aciertos; C, dos aciertos.

Construir una tarjeta con cinco aciertos.

**Problema 6**

Si son números reales tales que son mayores que cero.

Hallar el máximo de la función

**Problema 7**

Halle el valor de la expresión exacto de la expresión

**SOLUCION PRUEBA FINAL**

**MATEMÁTICAS DIVERSIFICADO**

**Problema 1**

Sean  números reales tales que  y . Hallar el valor del producto de estos tres números.

SOLUCIÓN:

Tenemos que si , entonces . Esto es debido a que .

Por lo tanto si , entonces .

**Problema 2**

Simplificar la expresión:

SOLUCIÓN:

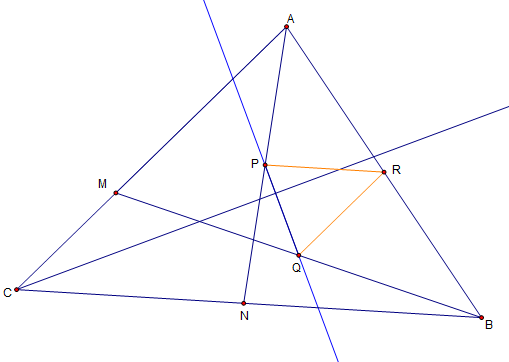
Usando la propiedad de cambio de base de los logaritmos tenemos:

Por tanto podemos escribir:

**Problema 3**

En el triángulo  sean  sobre el lado  y  sobre el lado , tales que . Sean  y  los puntos medio de  y  respectivamente. Demostrar que la bisectriz de  es perpendicular a la recta .

SOLUCIÓN:



Sea  el punto medio de . Al ser  paralela media en  se tiene que , análogamente para el triángulo , , como , el triángulo  es isósceles, por lo que la bisectriz de  será perpendicular a , pero como  y  , la bisectriz de  será paralela a la bisectriz de , con lo cual queda demostrado el problema.

**Problema 4**

Demostrar que:



Para todo .

SOLUCIÓN:

Por la desigualdad  tenemos:



Análogamente  y .

Sumando la primera y la segunda:



Análogamente sumando la segunda y tercera y la tercera y la primera se obtiene respectivamente:





Sumando estas 3 desigualdades se obtiene lo que se quiere demostrar.

**Problema 5**

Tres apostadores A, B y C pronostican el resultado de cinco partidos de fútbol. (L= Local, E=empate, V= visitante). Las tarjetas presentadas fueron:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | L | E | V |  |  | L | E | V |  |  | L | E | V |
| 1 | X |  |  |  | 1 |  |  | X |  | 1 | X |  |  |
| 2 | X |  |  |  | 2 |  | X |  |  | 2 | X |  |  |
| 3 |  | X |  |  | 3 | X |  |  |  | 3 |  |  | X |
| 4 |  | X |  |  | 4 |  | X |  |  | 4 | X |  |  |
| 5 |  |  | X |  | 5 | X |  |  |  | 5 |  | X |  |
| *Jugador A* | | | |  | *Jugador B* | | | |  | *Jugador C* | | | |

Finalizados los partidos se observó que los apostadores obtuvieron: A, tres aciertos; B, tres aciertos; C, dos aciertos.

Construir una tarjeta con cinco aciertos.

SOLUCIÓN:

Si sobre 5 partidos A y B tienen 3 aciertos cada uno, tienen al menos un acierto en común. Como A y B sólo comparten el pronóstico del partido 4, ése debe ser el acierto común. Por lo tanto el resultado del partido 4 es empate.

Sobre los 4 partidos restantes, A y B no comparten pronósticos, Por lo tanto, tiene 2 aciertos cada uno (4 en total).

C no acertó el partido 4, y en los partidos 3 y 5, no comparte pronóstico con nadie, por lo tanto, los aciertos de C están en los partidos 1 y 2, cuyo resultado es local.

El pronóstico de B falla en 1 y 2. Los restantes son aciertos.

La tabla de 5 aciertos es:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | L | E | V |
| 1 | X |  |  |
| 2 | X |  |  |
| 3 | X |  |  |
| 4 |  | X |  |
| 5 | X |  |  |

**Problema 6**

Si son números reales tales que son mayores que cero.

Hallar el máximo de la función

SOLUCIÓN:

Si a y b son números positivos, y se verifica la igualdad sí y solo si .

Esto se deduce de

En este caso en particular

Y vale la igualdad si y solo si ,

Y vale la igualdad si y solo si

Afortunadamente, cada una de las dos relaciones se reducen a

Entonces, si , se verifican ambas igualdades y por lo tanto se alcanza el valor máximo de la suma.

Si y , se tiene

**Problema 7**

Halle el valor de la expresión

SOLUCIÓN:

Se puede considerar esta “fracción infinita” como una sucesión de términos, tn, donde

Con el patrón observado anteriormente, se puede deducir la fórmula general:

Si obtenemos los primeros 10 términos realizando la división se muestra la tabla los resultados

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
| 1 | 2 | 0.5 |
| 2 | 1.5 | -0.1666 |
| 3 | 1.6666 | 0.0666 |
| 4 | 1.6 | -0.025 |
| 5 | 1.625 | 0.0097 |
| 6 | 1.6153 | -0.0037 |
| 7 | 1.619 | 0.0014 |
| 8 | 1.6176 | -0.0005 |
| 9 | 1.6181 | 0.0002 |
| 10 | 1.6179 | - |

En la tabla se puede observar que los valores no están ordenados ni en orden ascendente ni descendente, pero sí se observa un patrón. Se tiene que es mayor que , pero es menor que , y a su vez, es mayor que , mientras que es menor que , y así sucesivamente. Además, a cuando n toma valores mayores, la diferencia entre y disminuye y se aproxima a cero. De esto se puede deducir que cuando n tiende al infinito la diferencia entre y es 0, es decir que y son iguales.

Aplicando la fórmula general:

Se sabe que todos los valores de serán mayores que cero ya que son el resultado de varias sumas de números positivos. Dado que , es decir que es mayor que 1, sería negativo y por lo tanto no puede ser solución ya que el valor de debe ser positivo.

Entonces, para cuando n tiende al infinito, es un número irracional: